D E LJ I V O S T

1. Dokaži da je broj $a^3 - a$ deljiv sa 6 za proizvoljan ceo broj a.
2. Dokaži da je broj $a^3 - a$ deljiv sa 24 za svaki neparan broj a.
3. Broj $a + b + c$ je deljiv sa 6. Dokaži da je onda i broj $a^3 + b^3 + c^3$ deljiv sa 6.
4. Broj a^2 je deljiv sa $a + b$. Dokaži da je i b^2 deljiv sa $a + b$.
5. Dokaži da je broj $a^3 - 3a^2 + 2a$ deljiv sa 6, za svaki ceo broj a.
6. Dokaži da je broj $a^5 - 5a^3 + 4a$ deljiv sa 120, za svaki ceo broj a.
7. Ilija je na svakoj od 19 kartica napisao po jednu cifru različitu od 0. Kad je Đorđe video napisane brojeve izjavio je da među svim 19-cifrenim brojevima koji se mogu dobiti kad se kartice postave u niz postoji tačno jedan deljiv sa 11. Da li je Đorđe mogao biti u pravu?
8. Dokaži da broj $\overline{abababab}$ nije deljiv sa $\overline{ccdd}$.
9. Nađi sve brojeve oblika $\overline{13xy45z}$ koji su deljivi sa 792.
10. Za koje cifre x i y je $\overline{xxyy}$ kvadrat nekog prirodnog broja?
11. Da li broj oblika $\overline{abcd} + \overline{bcda} + \overline{cdab} + \overline{dabc}$ može biti potpun kvadrat?
12. $6n$–cifren broj je deljiv sa 7. Poslednja cifra premeštena je na prvo mesto. Dokaži da je tako dobijen broj takođe deljiv sa 7.
13. Zbir cifara prirodnog broja n jednak je zbiru cifara broja $2n$. Dokaži da je broj n deljiv sa 9.
14. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je broj $10^m + 1$ deljiv sa $10^n - 1$.
15. Neka je a zbir tri uzastopna broja, a b zbir sledeća tri uzastopna broja. Da li može biti $a \cdot b = 1111111111$?
16. Broj
$$\overline{abc} + \overline{bcd} + \overline{cda} + \overline{dac}$$
je deljiv sa 9. Dokaži da je onda broj $\overline{abcd}$ deljiv sa 3.
17. Nađi najveći četvorocifreni broj čije su sve cifre različite i koji je deljiv sa 2, 5, 7 i 11.
18. Nađi sve prirodne brojeve n takve da je broj $(n-1)!$ deljiv sa n

   Neka je n složen broj, $n \neq 4$. Dokazaćemo da je tada broj $(n-1)!$ deljiv sa n.

   Postoje dve mogućnosti:

   (1) n nije kvadrat prostog broja. Tada je $n = ab$ za neke prirodne brojeve a i b, $1 < a < b < n$. Tvrđenje važi na osnovu toga što se oba broja a i b pojavljuju kao činioci u proizvodu $(n-1)!$.

   (2) $n = p^2$, gde je p prost broj. Tada je $p < n$ i $2p < n$, osim za $n = 4$. Zato je $2p^2$ delitelj od $(n-1)!$ za $n \neq 4$.