5. ZADACI 21–25

21. Da li je moguće 100 žetona podeliti na 10 grupa sa različitim (pozitivnim) brojevima žetona tako da nije moguće jednu od tih grupa podeliti na dve tako da se dobije 11 grupa sa različitim (pozitivnim) brojevima žetona?

Rešenje. Da. Neka su žetoni podeljeni na 10 grupa sa brojem žetona $1, 3, 5, \ldots, 19$. ako bilo koju grupu podelimo na dva, u jednoj od novih grupa će broj žetona biti neparan i manji od 19.

22. *Iracionalna eksplozija* sa epicentrom u tački P odstranjuje iz ravni sve tačke koje se nalaze na iracionalnom rastojanju od tačke P. Koliko je najmanje iracionalnih eksplozija dovoljno da bismo iz ravni odstranile sve tačke?

Rešenje. Dve eksplozije nisu dovoljne, jer uvek postoji tačka čija su rastojanja od dve date tačke racionalni brojevi. Navodimo primer potpunog uništenja ravni sa tri eksplozije: Za epicentre uzimamo tačke $(0,0)$, $(a,0)$, $(-a,0)$, gde je $a = \sqrt[4]{2}$. Petpostavimo da tačka (x,y) nije uništena. To znači da su sva tri broja x^2+y^2, $(x-a)^2+y^2$ i $(x+a)^2+y^2$ racionalni brojevi. Međutim, oduzimanjem dvostrukog prvog broja od zbira druga dva, dobijamo da je $a^2 = \sqrt{2}$ racionalan broj, što je netačno.

23. Zbir dva prirodna broja jednak je 770. Dokaži da njihov proizvod nije deljiv sa 770.

Rešenje. Kako je $770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, da bi $x(770-x)$ bio deljiv sa 770, treba da je svaki od brojeva 2, 5, 7, 11 delitelj jednog od faktora na desnoj strani. Primetimo da ako je jedan od faktora deljiv nekim deliteljem od 770, onda je i drugi faktor deljiv tim deliteljem. Prema tome, ako je proizvod $x(770-x)$ deljiv sa 770, onda je svaki od faktora deljiv sa 770, što je nemoguće ako su x i $770-x$ prirodni brojevi.

24. (a) Prava je obojena sa dve boje. (Svakom bojom obojena je bar jedna tačka prave.) Da li se pri svakom takvom bojenju mogu naći tri tačke iste boje takve da je jedna od njih središte duži sa krajevima u druge dve tačke?

(b) Svaka tačka ravni obojena je jednom od dve boje. Dokaži da se mogu naći tri tačke iste boje koje su temena trougla sličnog datom trouglu. (Dva trougla su slična ako su uglovi jednog jednaki redom uglovima drugog.)

Rešenje. (a) Posmatrajmo pravu kao brojevnu pravu i uočimo na toj pravoj tačke sa celobrojnim koordinatama. Ako su celobrojne tačke obojeno naizmenično plavo i crveno, lako se vidi da takve tri tačke postoje; na primer, tačke sa koordinatama 0, 2 i 4. Pretpostavimo da su neke dve susedne tačke obojene crveno. Možemo uzeti da su to tačke 0 i 1. Pretpostavimo da tražene tri tačke ne postoje. Tada su tačke -1 i 2 obojene plavo, tačke -4 i 5 crveno, tačke -2 i 3 plavo, tačke -3 i 4 crveno. Kontradikcija, jer je tačka 0 središte duži sa krajevima u -4 i 4, a sve te tri tačke su obojene crveno.

(b) Posmatrajmo u ravni pravu p. Prema (a) na pravoj p postoje tri tačke iste boje, recimo crvene. Neka su to tačke A, M, B, pri čemu je M središte duži AB. Neka je ABC trougao sličan datom i neka su N i P redom središta stranica BC i CA. Ako je bar jedna od tačaka N, P, C crvena, imamo istobojni trougao sličan datom (ABC ili AMP ili MBN). Ako su sve tri plave, imamo istobojni trougao NPC sličan datom.

25. Svaki od dva igrača ima na listu papira ispisane brojeve od 1 do 35. Oni naizmenično zaokružuju po jedan broj, svaki na svom listu papira. Ako u bilo kom trenutku zbir zaokruženih brojeva na jednom listu bude za 30 veći od zbira brojeva na drugom papiru, pobednik je Drugi; u protivnom, pobednik je Prvi. Koji igrač ima PS?

Rešenje 1. Drugi. On ponavlja poteze Prvog igrača. U jednom trenutku Prvi će morati da zaokruži broj 30.

Rešenje 2. Drugi zaokružuje brojeve na svom listu proizvoljnim redom, izbegavajući samo broj 30. Ako ne ranije, onda u trenutku kad Prvi zaokruži sve brojeve, zbir brojeva na njegovom listu biće za 30 veći od zbira brojeva na listu Drugog igrača.