6. ZADACI 26–30

26. Dokaži da je za svaki prirodan broj $k > 1$, $1010\ldots0101$ (u zapisu je $k+1$ jedinica i k nula) složen broj.

Rešenje. Ako je $k > 1$ neparan, dati broj je deljiv sa 101. Ako je k paran, množeći dati broj sa 11 dobijamo broj oblika

$$\frac{1}{9}\cdot((10^{k+1}-1)\cdot 10^{k+1}+(10^{k+1}-1)) = \frac{1}{9}(10^{k+1}-1)(10^{k+1}+1).$$

Kako je broj $A = \frac{1}{9}(10^{k+1}+1)$ uzajamno prost sa 11, dati broj je deljiv sa A.

27. Svaka od deset cifara napisana je na dve kartice. Dokaži da se tih 20 kartica ne mogu poređati jedna do druge tako da se izmedju dve kartice sa cifrom k nalazi tačno k drugih kartica, za svaki broj k od 0 do 9.

Rešenje. Pretpostavimo da smo kartice uspeli poređati tako da se između dve kartice sa brojem k nalazi tačno k drugih. Označimo sa a_k redni broj prve a sa b_k redni broj druge kartice sa cifrom k. Tada je $b_k - a_k = k$ $(k = 0, 1, \ldots, 9$ i

$$(b_0 - a_0) + (b_1 - a_1) + \ldots + (b_9 - a_9) = 1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45,$$

ili

$$(b_0 + b_1 + \cdot + b_9) - (a_0 + a_1 + \ldots + a_9) = 45.$$

S druge strane,

$$(b_0 + b_1 + \ldots + b_9) + (a_0 + a_1 + \ldots + a_9)$$

je zbir rednih brojeva svih kartica, tj.

$$(b_0 + b_1 + \ldots + b_9) + (a_0 + a_1 + \ldots + a_9) = 1 + 2 + \cdots + 20 = 210,$$

odakle se dobija da je

$$2\cdot(b_0 + b_1 + \ldots + b_9) = 255,$$

što je kontradikcija (na levoj strani je paran a na desnoj neparan broj).

28. Ilija je doneo na pijacu vreću oraha. Prvi kupac je kupio 1 orah, drugi 2, treći 4, itd. svaki sledeći kupac kupio je dvostruko više oraha od prethodnog. Poslednji kupac kupio je 25 kilograma oraha, posle čega je Iliji ostao samo jedan orah. Koliko je kilograma oraha Ilija doneo na pijacu? (Svi orasi su iste mase.)

Rešenje. Neka je n ukupan broj kupaca. Tada je broj prodatih oraha jednak

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Kako je jedan orah ostao neprodat, Ilija je na pijacu doneo ukupno 2^n oraha. Poslednji kupac je kupio polovinu od toga, tj 2^{n-1} oraha, što čini 25 kilograma. Sledi da je Ilija na pijacu doneo 50 kilograma oraha.

29. Prava je obojena sa tri boje. (Svakom bojom obojena je bar jedna tačka prave.) Da li se pri svakom takvom bojenju mogu naći tri tačke različite boje takve da je jedna od njih središte duži sa krajevima u druge dve tačke?

Rešenje. Ne. Posmatrajmo pravu kao brojevnu pravu. Obojimo crvenom bojom broj 0, sve racionalne brojeve obojimo zeleno, a iracionalne plavo. Posmatrajmo sve duži čiji je jedan kraj tačka 0. Tada su drugi kraj duži i njeno središte obojeni istom bojom, jer su brojevi a i $2a$ oba racionalni, ili oba iracionani, tj. obojeni su istom bojom. Ako je tačka 0 središte duži, onda su njeni krajevi iste boje, jer su brojevi a i $-a$ oba racionalni, ili oba iracionalni.

30. Svaki od dva igrača ima na listu papira ispisane brojeve

$$1, 2, 3, \ldots, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35.$$

Oni naizmenično zaokružuju po jedan broj, svaki na svom listu papira. Ako u bilo kom trenutku zbir zaokruženih brojeva na jednom listu bude za 30 veći od zbira brojeva na drugom papiru, pobednik je Drugi; u protivnom, pobednik je Prvi. Koji igrač ima PS?

Rešenje. Drugi. On ponavlja poteze Prvog igrača, sve dok Prvi zaokružuje brojeve iz skupa

$$\{6, 7, 8, \ldots 29\}.$$

Prvi put kad Prvi zaokruži broj iz skupa

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 31, 32, 33, 34, 35\},$$

Drugi zaokruži za 30 veći ili manji broj iz istog skupa.