PITAGORINA TEOREMA

1. Kružnica je upisana u pravougli trougao ABC ($\angle C = 90°$) i njena tačka dodira M sa katetom AC deli tu katetu u odnosu $1 : 3$. Odredi odnos dužina kateta toga trougla.

2. Tetive AB i CD kružnice prečnika d seku se u tački M i uzajamno su normalne. Dokaž da je
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = d^2.$$

3. Kroz tačku P u unutrašnjosti kružnice povučene su uzajamno normalne tetive AC i BD. Dokaži da zbir kvadrata tih tetiva ne zavisi od izbora uzajamno normalnih tetiva kroz tačku P.

4. Dužine stranica pravougaonika $ABCD$ su $AB = 65\ cm$ i $BC = 63\ cm$. Iz tačke M na stranici CD stranice AB i AD se vide pod jednakim uglovima. U kom odnosu tačka M deli duž CD?

5. Naći zbir kvadrata rastojanja od svih temena kvadrata do prave koja prolazi kroz centar kvadrata.

6. Normale spuštene iz temena B i D pravougaonika na dijagonalu AC dele tu dijagonalu na tri jednaka dela. Dužina jedne stranice pravougaonika je $\sqrt{2}\ cm$. Odredi dužinu druge stranice.

7. Dužine stranica trougla su tri uzastopna cela broja, ne manja od 3. Dokaži da visina koja odgovara srednjoj po veličini stranici deli tu stranicu na dva dela čije se dužine razlikuju za 4.

8. U pravouglom trouglu ABC sa pravim uglom kod temena C simetrala ugla u temenu A deli naspramnu katetu na delove dužine 5 i 13. Izračunati površinu i obim trougla ABC.

9. P je tačka u unutrašnjosti pravougaonika $ABCD$. Ako su data rastojanja tačke P do tri temena pravougaonika, odredi njeno rastojanje do četvrtog temena.

10. Tačka M leži u unutrašnjosti kvadrata $ABCD$ i pri tome je $AM = 7\ cm$, $MB = 13\ cm$, $MC = 17\ cm$. Izračunaj površinu kvadrata.

11. Dokaži da je zbir kateta pravouglog trougla manji od zbira hipotenuze i visine na hipotenuzu.

12. U pravouglom trouglu ABC, a i b su katete, c hipotenuza i h_c visina spuštena na hipotenuzu. Dokaži da je i trougao sa dužinama stranica h_c, $c + h_c$ i $a + b$, takođe pravougli.

13. Neka je AB tetiva kružnice k. Kružnice k_1 i k_2 sa poluprečnicima r_1 i r_2 redom dodiruju tetivu AB u tački C i svaka od njih dodiruje kružnicu k. Dokaži da odnos $\frac{r_1}{r_2}$ ne zavisi od položaja tačke C na tetivi AB.

14. Data je četvrtina kruga ograničena poluprečnicima OA i OB. Paralelno sa tetivom AB povučena je prava koja seče tu četvrtinu kruga. Neka je C jedna tačka preseka te prave sa lukom kružnice, a P i Q tačke preseka sa polupravama OA i OB. Dokaži da je $AB^2 = PC^2 + QC^2$.

15. U trapezu $ABCD$ ($AB \parallel DC$) dužine osnovica su a i c ($c < a$), krakova b i d i dijagonala m i n. Poznato je da važi $m^2 + n^2 = (a + c)^2$. Odredi ugao između dijagonala trapeza.

16. Neka je $ABCDEF$ šestougao stranice a. Prava kroz D seče stranicu AF u tački M i deli šestougao na dva dela čije se površine odnose kao $1 : 3$. Odredi dužinu duži DM.

17. Dat je pravougaoni kružni isečak, poluprečnika R, ograničen poluprečnicima OM i ON (slika). Kružnica $k(M, R)$ deli taj isečak na dva dela. U manji deo upisana je kružnica c. Odredi poluprečnik te kružnice.

18. Iz tačke M u unutrašnjosti jednakostraničnog trougla ABC spuštene su normale MP, MQ i MR na stranice AB, BC i CA redom. Dokaži da je

    (a) $AP^2 + BQ^2 + CR^2 = PB^2 + QC^2 + RA^2$;

    (b) $AP + BQ + CR = PB + QC + RA$.

19. Kome temenu trougla je najbliži centar kružnice upisane u taj trougao?

20. Za stranice trougla važi da je $a^3 + b^3 = c^3$. Da li je taj trougao oštrougli, pravougli ili tupougli?

21. Dužine stranica dva pravougaonika su celi brojevi. U svakom pravougaoniku dužina jedne stranice je veća od 2000, a dužina druge nije veća od 60. Dokaži da su takva dva pravougaonika podudarna ako su im podudarne dijagonale.

22. Dat je jedinični kvadrat sa temenima u celobrojnim tačkama. Neka je P proizvoljna tačka sa celobrojnim koordinatama. Dokaži da je rastojanje tačke P od bar jednog temena kvadrata iracionalan broj.

23. Neka su a i b paralelne prave na rastojanju d. U unutrašnjosti trake ograničene sa te dve prave smešteni su jedinični disjunktni krugovi, tako da svaka prava koja seče prave a i b seče i bar dva kruga. Dokaži da je $d \geq 2 + \sqrt{3}$.

24. Sva temena izlomljene linije $ABCDE$ bey samopreseka leže na jednoj kružnici (slika). Veličina svakog od uglova $\angle ABC$, $\angle BCD$ i $\angle CDE$ iznosi $45°$. Dokaži da je $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$.

25. Težišne linije pravouglog trougla iz temena oštrih uglova su dužine 7 cm i 4 cm. Izračunaj dužinu hipotenuze toga trougla.

26. Ako je trougao ABC pravougli i ako su t_a, t_b, t_c težišne linije koje odgovaraju katetama, odnosno hipotenuzi, onda je $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$. Dokaži.

27. Izračunati obim trougla čija je jedna stranica dužine 24 cm, a odgovarajuća visina i težišna linija 8 cm, odnosno 10 cm.

28. U pravougaoniku $ABCD$ tačka M je središte duži AB, a E presek dijagonale AC i duži DM. Ako je $AB = \sqrt{2}$ i $BC = 1$, Dokaži a je tada $\angle CED$ prav.

29. Neka su A, B, C, D tačke jedne kružnice takve da se tetive AC i BD seku i uzajamno su normalne. Dokaži da je $AB^2 + CD^2 = d^2$, gde je d prečnik kružnice.

30. U trouglu ABC najveći ugao je onaj sa temenom u A. Na stranici BC nađi tačku D takvu da je $AB^2 + BD^2 = AC^2 + CD^2$.

31. Neka su a i b katete i h visina na hipotenuzu pravouglog trougla. Dokaži da je

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

32. Temena A i B kvadrata $ABCD$ leže na kružnici poluprečnika r, a temena C i D na tangenti te kružnice. Odredi dužinu stranice kvadrata.

33. Dato je pet duži takvih da se od svake tri može sastaviti trougao. Dokaži da je bar jedan od tih trouglova oštrougli.

34. Pravougli trougao ABC ima katete dužine 3 i 4. Duža kateta dodiruje kružnicu čiji je centar O na hipotenuzi i koja sadrži kraj kraće katete. Izračunaj površinu kružnice.

35. Dokaži nejednakost

$$\sqrt{99 \cdot 101} + \sqrt{98 \cdot 102} + \cdots + \sqrt{2 \cdot 198} + \sqrt{1 \cdot 199} < \frac{100^2 \cdot \pi}{4}.$$

36. Neka je $OABC$ pravougli tetraedar, tj. trostrana piramida kod koje su sva tri ugla pri vrhu O prava: $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90°$. Dokaži da je $P_{ABC}^2 = P_{AOB}^2 + P_{BOC}^2 = P_{COA}^2$. (Drugim rečima, kvadrat površine osnove pravouglog tetraedra jednak je zbiru kvadrata površina njegovih bočnih strana.)

Poslednja 4 zadatka namenjena su u prvom redu učenicima 8. razreda.