7. ZADACI 31–35

31. Zbir tri prirodna broja, koji su potpuni kvadrati, deljiv je sa 9. Dokazati da među njima postoje dva broja čija je razlika deljiva sa 9.

32. Neka je K podnožje visine iz temena A trougla ABC i BN simetrala ugla ($N \in AC$). Odredi veličine uglova trougla ABC ako je $\angle KAB = \angle ACB$ i $\angle BNC = 99°$.

33. (a) U svaki od četiri kvadrata 5×5 upisani su brojevi od 1 do 25, u svako polje po jedan. Dokaži da u skupu $A = \{1, 2, \ldots, 25\}$ postoje dva broja koja ni u jednom od ta četiri kvadrata nisu susedni, tj. ne nalaze se u susednim poljima. Dva polja su susedna ako imaju zajedničku ivicu.

(b) U svaki od sedam kvadrata 5×5 upisani su brojevi od 1 do 25, u svako polje po jedan. Dokaži da u skupu $A = \{1, 2, \ldots, 25\}$ postoje dva broja koja ni u jednom od tih sedam kvadrata nisu susedni, tj. ne nalaze se u susednim poljima.

34. Posmatrajmo tri tipa figura (polimina) sastavljenih od jediničnih kvadrata: (1) kvadrat 2×2, (2) ugaoni tromino (kvadrat 2×2 iz koga je odstranjen jedan jedinični kvadrat), T tetramino (pravougaonik 2×3 iz koga su odstranjena dva ugaona jedinična kvadrata). Kvadrat 2017×2017 popločan je figurama ta tri tipa. Dokazati da u popločavanju učestvuje bar 4035 figura tipa (2).

35. Za godinu kažemo da je *srećna* ako su sve cifre u njenom zapisu različite uzastopne cifre. Na primer, poslednja srećna godina je bila 2013.

(a) Koja je prva sledeća srećna godina?

(b) Koliko ima srećnih godina u trećem milenijumu?

(c) Koliko je bilo srećnih godina u drugom milenijumu?

(d) Koliko je bilo srećnih godina od početka nove ere?