2. ZADACI 6–10

6. Aca je prodavao lubenice na pijaci. Kad ga je Bora pitao koliko ima lubenica, Aca je odgovorio: "Broj lubenica je kub prirodnog broja koji nije deljiv sa 7." Zatim je Aca odbrojavao lubenice i svaku sedmu je dao Bori. Bora je uzeo poklonjene lubenice i rekao Voji: "Ni broj mojih lubenica nije deljiv sa 7; ipak ću svaku sedmu dati tebi." Voja nije ništa rekao, samo je svaku sedmu svoju lubenicu dao Gavri. Gavra je video da broj njegovih lubenica nije deljiv sa 7, ali je svaku sedmu poklonio Darku. Darko je od Gavre dobio tačno 10 lubenica.

Koliko je lubenica imao Aca na početku?

Rešenje. Gavra je mogao imati od $10 \cdot 7 + 1 = 71$ do $10 \cdot 7 + 6 = 76$ lubenica. Voja od $71 \cdot 7 = 497$ do $76 \cdot 7 + 6 = 538$. Bora od $497 \cdot 7 + 1 = 3480$ do $538 \cdot 7 + 6 = 3772$. Aca od $3480 \cdot 7 + 1 = 24361$ do $3772 \cdot 7 + 6 = 26410$. U intervalu od 24361 do 26410 postoji samo jedan kub, a to je $24389 = 29^3$.

7. Jednim klikom broj na ekranu računara može se povećati za razlomljeni deo. Na primer, iz $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ odnosno $3,75$ dobija se $\frac{15}{4} + \frac{3}{4} = \frac{18}{4}$ odnosno $4,5$. Polazeći od nekog pozitivnog broja manjeg od 1 posle 10 klikova dobijen je broj 10. Koji je bio polazni broj?

Rešenje. Kako je početni broj manji od 1, a posle 10 klikova imamo broj 10, zaključujemo da se svakim klikom ceo deo broja povećava za 1. Idući unazad zaključujemo da se broj 10 može dobiti samo iz broja 9,5 ($9,5 + 0,5 = 10$). Broj $9,5 = 9\frac{1}{2}$ može se na opisani način dobiti iz 9,25 i 8,75. Prvi slučaj otpada, jer ceo deo nije povećan za 1. Dakle, posle osmog klika imali smo broj $8,75 = 8\frac{3}{4}$. Broj 8,75 moguće je na opisani način dobiti iz brojeva 8,735 i 7,875. Kao i u prethodnom slučaju zaključujemo da je posle sedmog klika dobijen broj $7,875 = 7\frac{7}{8}$. Na sličan način, idući unazad dobijamo da je na početku na ekranu bio broj $\frac{1023}{1024}$.

8. Paralelogrami $ABCD$ i $A'B'C'D$ su takvi da je tačka A' na stranici AB, a tačka C na stranici $B'C'$. Dokaži da paralelogrami $ABCD$ i $A'B'C'D$ imaju jednake površine.

Rešenje. Sledi na osnovu činjenice da je površina trougla $DA'C$ jednaka $\frac{1}{2}$ površine i jednog i drugog paralelograma.

9. Da li je moguće u temenima svakog trougla napisati po jedan broj tako da dužina svake stranice bude jednaka zbiru brojeva u njenim temenima?

Rešenje. Da. U svakom temenu treba napisati broj koji je jednak dužini tangentne duži od tog temena do tačke dodira upisane kružnice.

10. Dat je papirni pravougaonik $m \times n$ podeljen na mn jediničnih kvadrata ($m > 1, n > 1$). Prvi igrač seče taj pravougaonik na dva dela duž jedne linije podele. Drugi igrač radi to isto sa jednim od dobijenih delove itd. naizmenično. Pobednik je igrač koji postigne da se posle njegovog poteza od dobijenih delova može sastaviti traka $1 \times mn$. Koji igrač ima pobedničku strategiju?

Rešenje. Ako je bar jedan od brojeva m, n paran, Prvi ima PS. On prvim potezom raseče dati pravougaonik na dva podudarna, a zatim primenjuje simetriju. Ako su i m i n neparni, Drugi ima PS. On od početka primenjuje simetriju.