3. ZADACI 11–15

11. Da li postoji četvorougao takav de se u svakom njegovom temenu može napisati po jedan broj tako da dužina svake stranice četvorougla bude jednaka zbiru brojeva u njenim temenima?

Rešenje. Da. Takav je svaki tangentni četvorougao. U svakom temenu treba napisati broj jednak dužini tangentne duži od tog temena do tačke dodira.

12. Na tabli su ispisani brojevi od 100 do 2150. Svake minute na svaki broj primenjuje se sledeća operacija: Ako je broj deljiv sa 100, deli se sa 100, a ako nije, smanjuje se za 1. Koji će biti najveći broj na tabli posle 83 minute?

Rešenje. Ako je polazeći od nekog broja bar jedanput primenjeno deljenje sa 100, smanjenje polaznog broja je veće od 100. Broj može da izbegne takvo smanjenje samo ako je dvocifreni završetak veći od 82. Među datim brojevima najveći takav je broj 2099, koji posle 83 smanjenja daje broj $2099 - 83 = 2016$.

13. Dat je trougao ABC. Neka su ABC_1 i BCA_1 jednakostranični trouglovi koji sa trouglom ABC nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka.

(a) Dokaži da je $AA_1 = CC_1$.

(b) Odredi ugao između pravih AA_1 i CC_1.

Rešenje. Koristiti podudarnost trouglova AA_1B i C_1CB.

14. Dato je 15 prirodnih brojeva $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_{15}$, takvih da su svaka dva uzajamno prosti, pri čemu je $1 < a_i < 2015$. Dokaži da je među datim brojevima bar jedan prost.

Rešenje. Ako su svi dati brojevi složeni, onda svaki sadrži neki prost delitelj manji od 45 (jer je $45^2 = 2025 > 2015$). Međutim, takvih prostih brojeva nema više od 14; prema tome, neka dva se poklapaju, što je u kontradikciji sa uslovima zadatka.

Uopštenje: Dato je n prirodnih brojeva $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$, takvih da su svaka dva uzajamno prosti, pri čemu je $1 < a_i < (2n-1)^2$. Dokaži da je među datim brojevima bar jedan prost.

Rešenje. Ako su svi dati brojevi složeni, onda svaki sadrži neki prost delitelj manji od $2n - 1$. Međutim, takvih prostih brojeva nema više od $n - 1$; prema tome, neka dva se poklapaju, što je u kontradikciji sa uslovima zadatka.

15. Ribolovac Vlada je svaki dan išao u lov i na povratku je govorio: "Danas sam ulovio više riba nego prekjuče, a manje nego pre sedam dana."

(a) Da li su njegove izjave mogle biti istinite tokom sedam uzastopnih dana?

(b) Koliko najviše uzastopnih dana su njegove izjave mogle biti istinite?

Rešenje. (a) Ne. Pretpostavimo da je Vlada govorio istinu od 8. do 14. aprila. Sa a_i označimo broj upecanih riba i–tog dana u aprilu. Tada je

$$a_8 > a_6 > a_{13} > a_{11} > a_9 > a_7 > a_{14} > a_{12} > a_{10} > a_8,$$

što je kontradikcija.

(b) 6 dana. Na primer, Vlada je mogao upecati u prvih 13 dana aprila sledeći broj riba redom:

$$6, 2, 7, 3, 8, 4, 0, 5, 1, 6, 2, 7, 3.$$

Lako se proverava da je od 8. do 13. aprila Vlada govorio istinu.