7. ZADACI 31–35

31. Zbir tri prirodna broja, koji su potpuni kvadrati, deljiv je sa 9. Dokaži da među njima postoje dva broja čija je razlika deljiva sa 9.

Rešenje. Potpun kvadrat pri deljenju sa 9 može dati samo jedan od sledećih ostataka: 0, 1, 4, 7. Lako se proverava da zbir tri različita ostatka toga oblika nije deljiv sa 9.

32. Neka je K podnožje visine iz temena A trougla ABC i BN simetrala ugla ($N \in AC$). Odredi veličine uglova trougla ABC ako je $\angle KAB = \angle ACB$ i $\angle BNC = 99°$.

Rešenje. Posmatramo dva slučaja:

(1) Tačka K leži na stranici BC (slika). Neka je $\angle ABN = \delta$. Tada je $\angle CBN = \delta$, $\angle ABC = 2\delta$. Iz pravouglog trougla ABK dobijamo da je $\angle BAK = 90° - 2\delta$, a iz trougla BNC: $\angle BCN = 180° - \angle BNC - \angle BNC$, tj. $\angle BCN = 180° - 99° - \delta = 81° - \delta$. Kako je $\angle BCN = \angle ACB$ i $\angle ACB = \angle KAB$, možemo da napišemo jednačinu $90° - 2\delta = 81° - \delta$, odakle je $\delta = 9°$. Dalje sledi da je $\angle ABC = 2 \cdot 9° = 18°$, $\angle ACB = 81° - \delta = 72°$, $\angle BAC = 90°$.

(b) Tačka K leži na produžetku stranice BC (iza tačke B, jer je $\angle ACB$ oštar). To se dešava u slučaju kad je ugao $\angle ABC$ tup (slika). Neka je $\angle ACB = \gamma$. Ugao $\angle ABC$ je spoljašnji ugao trougla AKB, pa je $\angle ABC = 90° + \gamma$. Kako je BN simetrala ugla u trouglu ABC, to za trougao BNC važi $\angle B + \angle N + \angle C = 180°$, tj. $0,5 \cdot (90° + \gamma) + 99° + \gamma = 180°$, odnosno $\frac{3}{2}\gamma + 144° = 180°$. Odavde nalazimo da je $\gamma = 24°$, $\angle ABC = 90° + \gamma = 114°$, $\angle BAC = 42°$.

33. (a) U svaki od četiri kvadrata 5×5 upisani su brojevi od 1 do 25, u svako polje po jedan. Dokaži da u skupu $A = \{1, 2, \ldots, 25\}$ postoje dva broja koja ni u jednom od ta četiri kvadrata nisu susedni, tj. ne nalaze se u susednim poljima. Dva polja su susedna ako imaju zajedničku ivicu.

(b) U svaki od sedam kvadrata 5×5 upisani su brojevi od 1 do 25, u svako polje po jedan. Dokaži da u skupu $A = \{1, 2, \ldots, 25\}$ postoje dva broja koja ni u jednom od tih sedam kvadrata nisu susedni, tj. ne nalaze se u susednim poljima.

Rešenje. (a) Obojimo svaki kvadrat na šahovski način, tako da se dobiju 12 belih i 13 crnih polja. Susedna polja su različito obojena. Podelimo brojeve skupa A u 16 grupa:

$$CCCC, CCCB, CCBC, \ldots, BBBC, BBBB.$$

($CBCC$ znači da je broj iz te grupe u prvom kvadratu na crnom polju, u drugom na belom, u trećem na crnom, u četvrtom na crnom.) Kako ima više brojeva nego grupa, neka grupa sadrži bar dva broja. Brojevi iz iste grupe nisu susedi ni u jednom kvadratu, jer su u svakom kvadratu na poljima iste boje.

(b) Prethodno rešenje ne prolazi. Zašto? Primenjujemo novi pristup.

Od brojeva od 1 do 25 može se formirati $\frac{25 \cdot 24}{2} = 25 \cdot 12 = 300$ parova različitih brojeva. S druge strane, u svih sedam kvadrata može se uočiti $7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 280$ susednih polja. Po Dirihleovom principu postoji par brojeva koji nisu susedni ni u jednom od sedam kvadrata.

Napomena: Rešenje pod (b) može se primeniti i u slučaju (a).

34. Posmatrajmo tri tipa figura (polimina) sastavljenih od jediničnih kvadrata: (1) kvadrat 2×2, (2) ugaoni tromino (kvadrat 2×2 iz koga je odstranjen jedan jedinični kvadrat), T tetramino (pravougaonik 2×3 iz koga su odstranjena dva ugaona jedinična kvadrata). Kvadrat 2017×2017 popločan je figurama ta tri tipa. Dokaži da u popločavanju učestvuje bar 4035 figura tipa (2).

Rešenje. Rešavaćemo opštiji slučaj. Neka se radi o pokrivanju kvadrata $(2n-1) \times (2n-1)$. Označimo zvezdicama polja sa neparnim rednim brojevima i vrsta i kolona. Označimo sa x broj figura tipa (2), a sa y broj figura tipa (1) i (3) zajedno. Tada je $3x + 4y = (2n-1)^2$. Lako se vidi da svaka figura sadrži najviše jednu zvezdicu, pa je $x + y \geq n^2$, odakle je $4x + 4y \geq 4n^2$. Zato je $x \geq 4n^2 - (2n-1)^2 = 4n - 1$.

35. Za godinu kažemo da je *srećna* ako su sve cifre u njenom zapisu različite uzastopne cifre. Na primer, poslednja srećna godina je bila 2013.

(a) Koja je prva sledeća srećna godina?

(b) Koliko ima srećnih godina u trećem milenijumu?

(c) Koliko je bilo srećnih godina u drugom milenijumu?

(d) Koliko je bilo srećnih godina od početka nove ere?

Rešenje. (a) 2031.

(b) U zapisu srećne godine trećeg milenijuma mogući su sledeći izbori cifara: 0,1,2,3; 1,2,3,4 ili 2,3,4,5. Pri tome je cifra 2 uvek na prvom mestu. Za svaku izbor cifara postoji 6 mogućnosti za redosled druge, treće i četvrte cifre. Dakle, traženi broj je $3 \cdot 6 = 18$.

(c) U zapisu srećne godine drugog milenijuma mogući izbori cifara su 0,1,2,3 i 1,2,3,4. Pri tome je cifra 1 uvek na prvom mestu. Za svaku kombinaciju postoji 6 mogućnosti za redosled druge, treće i četvrte cifre. Dakle, traženi broj je $2 \cdot 6 = 12$.