ZIMSKI ZADACI – ZIMA 2019/2020

1. Dokaži da ne postoji prirodan broj a takav da su i $5a + 9$ i $2a + 3$ deljivi sa 13.

2. (a) Broj a ima 2020 cifara, a broj b napisan je pomoću istih cifara u nekom drugom poretku. Da li je moguće da su sve cifre zbira $a + b$ sedmice?

   (b) Broj a ima 2019 cifara, a broj b napisan je pomoću istih cifara u nekom drugom poretku. Da li je moguće da su sve cifre zbira $a + b$ sedmice?

3. Neka su x i y prirodni brojevi koji zadovoljavaju jednačinu

$$2x^2 + x = 3y^2 + y.$$

   Dokaži da su brojevi $x - y$, $2x + 2y + 1$ i $3x + 3y + 1$ potpuni kvadrati.

   (Na primer, za $x = 22$, $y = 18$ je $2 \cdot 22^2 + 22 = 3 \cdot 18^2 + 18$, i brojevi $x - y = 22 - 18 = 4$, $2 \cdot 22 + 2 \cdot 18 + 1 = 81$, $3 \cdot 22 + 3 \cdot 18 + 1 = 121$ su potpuni kvadrati.)

4. Marko je napisao na tabli 10 prirodnih brojeva. Ilija je za svakih 9 napisanih brojeva izračunao njihov zbir. Među dobijenim zbirovima je bilo 9 različitih brojeva:

$$86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 95.$$

   Koje je brojeve napisao Marko?

5. Postoji li 2019 uzastopnih prirodnih brojeva čiji je zbir potpun kub?

6. Posmatrajmo niz brojeva

$$1, 14, 27, 40, 53, \ldots$$

   u kome je svaki broj, počev od drugog, za 13 veći od prethodnog broja u nizu. Dokaži da u tom nizu ima beskonačno mnogo brojeva u čijem se dekadnom zapisu pojavljuje samo cifra 2.

7. Dokaži da u nizu

$$31, 331, 3331, 33331, \ldots$$

   ima beskonačno mnogo brojeva deljivih sa 31, a nema nijednog deljivog sa 13.

8. Neka su $a_1, a_2.a_3, \ldots$ brojevi iz skupa $\{-1, 1\}$ takvi da je

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_na_1 = 0.$$

   Dokaži da je onda broj n deljiv sa 4.

   Dokaži da postoji skup A koji sadrži 1000000 prirodnih brojeva i ima sledeće svojstvo: za bilo koji podskup skupa A, zbir brojeva iz toga podskupa nije potpun kvadrat.

9. Odredi poslednju cifru zbira kvadrata prvih 2019 članova niza

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, \ldots$$

10. Dat je šestocifren broj deljiv sa 37 čije su sve cifre različite od nule i međusobno različite. Dokaži da se premeštanjem cifara toga broja može dobiti još bar sedam različitih brojeva deljivih sa 37.

11. Zbir dva trocifrena prirodna broja deljiv je sa 37. Dokaži da je šestocifren broj dobijen dopisivanjem jednog od tih brojeva drugom - takođe deljiv sa 37.

12. Dokaži da se nijedan prost broj ne može na dva različita načina predstaviti u obliku zbira kvadrata dva prirodna broja.

13. Ako su m, n i a prirodni brojevi, dokaži da je onda

$$2^{4m+2} + a^{4n+4}$$

složen broj.

14. Dokaži da jednačina

$$5x^2 - 4y^2 = 2019$$

nema celobrojnih rešenja.

15. U kvadratu stranice 44 cm raspoređeno je 2019 tačaka. Dokaži da među njima postoje dve tačke na rastojanju manjem od $1,5$ cm.

16. Sve tačke na stranicama jednakostraničnog trougla obojene su - neke plavom, a neke crvenom bojom. Dokaži da se mogu naći tri tačke iste boje koje su temena jednog pravouglog trougla.

17. Da li je moguće u temenima devetougla rasporediti različite prirodne brojeve od 1 do 9 tako da je zbir brojeva u svaka tri uzastopna temena deljiv sa 3 i

    (a) veći od 9;

    (b) veći od 14?

18. U niz su ispisani brojevi od 1 do 100 proizvoljnim redom. Dokaži da se mogu naći dva uzastopna člana niza čiji zbir je veći od 50, a nije veći od 150.

19. Da li je moguće numerisati temena kocke različitim prirodnim brojevima od 1 do 8 tako da zbirovi po dva broja na krajevima svake ivice budu različiti?

20. Dokaži da postoji 100 uzastopnih prirodnih brojeva među kojima je tačno 5 prostih.

21. Na šahovskom turniru učestvovala su dva majstora i nekoliko velemajstora. Dva majstora su zajedno osvojili 8 poena, a svi velemajstori su imali isti broj poena. Koliko je velemajstora učestvovalo na turniru? (Po pravilima šahovskih turnira, svaki učesnik igra sa svakim po jednu partiju. Za pobedu se dobija 1 poen, za poraz 0 poena, a za nerešenu igru $\frac{1}{2}$ poena.)

22. Na stranici AC trougla ABC uzeta je tačka D tako da se kružnice upisane u trouglove ABD i BCD dodiruju. Poznato je da je $AD = 2$, $CD = 4$, $BD = 5$. Odredi poluprečnike kružnica.

23. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao sa jednakim uglovima kod temena A i B. Simetrale stranica AD i BC seku se na stranici AB. Dokaži da su dijagonale toga četvorougla jednake.

24. U trouglu ABC je $AC = 5\ cm$, stranica BC je za $2\ cm$ duža od stranice AB, a ugao kod temena A je dva puta veći od ugla kod temena C. Odredi dužine ostale dve stranice trougla.

25. Dužine stranica pravouglog trougla su celi brojevi. Odredi dužinu hipotenuze ako je dužina jedne katete 2019.

26. Dokaži da dva prosta broja blizanca (koji se razlikuju za 2) ne mogu biti dužine kateta jednog Pitagorinog trougla (pravouglog trougla sa celobrojnim dužinama stranica).

27. Od 4 štapa dužine 1 sastavljen je pravougli trougao i pri tome je samo jedan štap prelomljen na dva dela. Odredi površinu toga trougla.

28. Površine tri pravougaonika su redom $42\ cm^2$, $75\ cm^2$ i $90\ cm^2$. Prva dva imaju jednake dijagonale, drugi i treći imaju jednake kraće stranice, prvi i treći jednake duže stranice. Odredi obime tih pravougaonika.

29. Neka su M, N, P, Q redom tačke na stranicama AB, BC, CD, CA kvadrata $ABCD$ takve da je $AM = NC = PD = QA$. Povučena je izlomljena linija $PNQM$. Dokaži da je $\angle PNC = \angle NQM$.

30. Visina i težišna linija iz jednog temena trougla dele ugao u tom temenu na tri dela čije se veličine odnose kao $5 : 8 : 5$. Odredi veličine uglova toga trougla.

31. Vuk, Marko, Zdravko i Laza takmičili su se u trčanju na kružnoj stazi. Startovali su istovremeno, svako od njih konstantnom brzinom i posle izvesnog vremena se svi poravnali. Poznato je da je do tog trenutka Zdravko prestigao Lazu jedanput, Laza Vuka triput, a Vuk Marka dva puta. Koliko je puta do tog trenutka Zdravko prestigao Marka?