KRUŽNICA, TETIVNI ČETVOROUGAO

1. U kvadratu $ABCD$ dijagonale AC i BD seku se u tački O. Na stranicama BC i CD date su tačke M i N redom takve da je $BM = CN$. Neka je P tačka preseka pravih AM i BN. Dokaži da je prava PO simetrala ugla APN.

2. Krajevi pet paralelnih tetiva kružnice dele kružnicu na 10 lukova. Poznato je da su za svaki od tih lukova njemu susedni lukovi podudarni. Dokaži da je zbir dužina srednje i dve krajnje tetive jednaka zbiru dužina ostale dve tetive.

3. Na kružnici su date tačke A, B, C, D tim redom, koje dele kružnicu na četiri luka. Tačka M polovi luk AB. Označimo sa P i Q redom preseke tetiva MC i MD sa tetivom AB. Dokaži da je $PQDC$ tetivni četvorougao.

4. Dokaži da su tri kružnice od kojih svaka sadrži ortocentar i dva temena trougla – podudarne.

5. Kružnice k_1 i k_2 seku se u tačkama A i E. Kroz tačku A povučena je prava a koja seče kružnice k_1 i k_2 (po drugi put) u tačkama B i C redom. Tangente u tačkama B i C kružnica k_1 i k_2 redom, seku se u tački D. Dokaži da veličina ugla BDC ne zavisi od izbora prave a kroz tačku A.

6. Neka je M tačka u unutrašnjosti četvorougla $ABCD$ takva da je četvorougao $ABMD$ paralelogram. Dokaži da ako je $\angle CBM = \angle CDM$, tada je i $\angle ACD = \angle BCM$.

7. U unutrašnjosti paralelograma $ABCD$ data je tačka Q takva da je $\angle ABQ = \angle QDA$. Dokaži da je $\angle BQA + \angle CQD = 180°$.

8. Prava kroz teme A jednakostraničnog trougla ABC seče upisanu kružnicu u tačkama Q i P tako da je tačka Q središte duži AP. Odredi veličinu ugla BPC.

9. Kroz centar kružnice k_1 prolazi kružnica k_2. Te dve kružnice se seku u tačkama A i B. Kroz tačku B konstruisana je tangenta t kružnice k_2 koja kružnicu k_1 preseca u tački C. Dokaži da je $AB = BC$.

10. Dat je nejednakokraki trougao ABC. Neka je tačka H ortocentar, a O centar kružnice opisane oko trougla ABC i neka prave CH i CO seku opisanu kružnicu redom u tačkama M i N. Dokaži da su tačke A, B, M, N temena jednakokrakog trapeza.

11. Bilijar ima oblik konveksnog četvorougla $ABCD$. Iz tačke K stranice AB puštena je bilijarska loptica, koja se odbila od stranica BC, CD i DA u tačkama L, M, N redom, vratila se u tačku K i nastavila kretanje po trajektoriji $KLMN$. Dokaži da je $ABCD$ tetivni četvorougao.

12. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao takav da je teme D u unutrašnjosti kružnice opisane oko trougla ABC. Dokaži da je $\angle BAD + \angle BCD < 180°$.

13. Dijagonale tetivnog četvorougla $ABCD$ seku se u tački O. Kružnice opisane oko trouglova AOB i COD seku se u tački M na stranici AD. Dokaži da je tačka O centar kružnice upisane u trougao BMC.

14. U tetivnom četvorouglu $ABCD$ tačka M leži na stranici AD i pri tome je $BM \parallel CD$ i $CM \parallel BA$. Ako je $AM = a$ i $DM = b$, dokaži da je $BC = \sqrt{ab}$.

15. U kružnici sa centrom O je AB prečnik, a CD tetiva normalna na taj prečnik. Tačka M je središte poluprečnika OC, a E tačka kružnice takva da tetiva AE sadrži tačku M. Tetive DE i BC seku se u tački P. Dokaži da tačka P polovi tetivu BC.