KRUŽNICA, TETIVNI ČETVOROUGAO

1. U kvadratu $ABCD$ dijagonale AC i BD seku se u tački O. Na stranicama BC i CD date su tačke M i N redom takve da je $BM = CN$. Neka je P tačka preseka pravih AM i BN. Dokaži da je prava PO simetrala ugla APN.

Rešenje. Pravougli trouglovi ABM i BCN su podudarni (podudarne katete), pa je $\angle BAM = \angle CBN$. Kako su kraci BA i CB uzajamno normalni, to su i kraci AM i BN takođe normalni, što znači da je $\angle APN = \angle APB = 90°$. Kako je i $\angle AOB = 90°$, to tačke A, O, P, B pripadaju istoj kružnici, tj. kružnici nad prečnikom AB. Tada je $\angle APO = \angle ABO = 45°$ (periferijski uglovi nad tetivom AO), odakle sledi tvrđenje zadatka.

2. Krajevi pet paralelnih tetiva kružnice dele kružnicu na 10 lukova. Poznato je da su za svaki od tih lukova njemu susedni lukovi podudarni. Dokaži da je zbir dužina srednje i dve krajnje tetive jednaka zbiru dužina ostale dve tetive.

Rešenje. Označimo tetive navedene u uslovima zadatka sa A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5 (slika) Povucimo duži A_1A_2, B_1A_3, B_2A_4, B_3A_5, B_4B_5. Označimo sa C_1, C_2, C_3 redom tačke preseka B_1A_3 i A_2B_2, A_3B_3 i B_2A_4, A_4B_4 i B_3A_5. Lukovi A_1B_1 i A_2A_3 su podudarni, pa je $A_1A_2 \parallel B_1A_3$. Analogno zaključujemo da je $B_1A_3 \parallel B_2A_4$, $B_2A_4 \parallel B_3A_5$, $B_3A_5 \parallel B_4B_5$. Dakle, četvorouglovi $A_1A_2C_1B_1$, $C_1A_3C_2B_2$, $C_2A_4C_3B_3$ i $C_3A_5B_5B_4$ su paralelogrami, pa je $A_1B_1 = A_2C_1$, $A_3C_2 = C_1B_2$, $C_2B_3 = A_4C_3$, $A_5B_5 = C_3B_4$. Sabiranjem poslednjih jednakosti, dobijamo tvrđenje.

U dokazu smo koristili sledeću lemu: Ako su A, B, C i D četiri tačke kružnice (tim redom) i ako su luci BC i AD podudarni, onda su tetive AB i CD paralelne.

3. Na kružnici su date tačke A, B, C, D tim redom, koje dele kružnicu na četiri luka. Tačka M polovi luk AB. Označimo sa P i Q redom preseke tetiva MC i MD sa tetivom AB. Dokaži da je $PQDC$ tetivni četvorougao.

Rešenje. Dovoljno je dokazati da je $\angle CDQ + \angle QPC = 180°$, tj. da je

$$\angle CDM = \angle BPC. \tag{1}$$

Imamo da je

$$\angle CDM = \angle CDB + \angle BDM. \tag{2}$$

Kako je $\angle BPC$ spoljašnji ugao trougla APC, imamo da je

$$\angle BPC = \angle PCA + \angle PAC = \angle MCA + \angle BAC. \tag{3}$$

Kako je $\angle CDB = \angle BAC$ (periferijski uglovi nad istim lukom) i $\angle BDM = \angle MCA$ (periferijski uglovi nad jednakim lukovima), iz (2) i (3) sledi tražena jednakost (1).

4. Dokaži da su tri kružnice od kojih svaka sadrži ortocentar i dva temena trougla – podudarne.

Rešenje. Neka je H ortocentar trougla ABC. Dovoljno je da dokažemo da su podudarne kružnica k_1 opisana oko trougla ABH i kružnica k_2 opisana oko trougla BCH (jer je dokaz isti za bilo koje dve kružnice).

Neka su HK i HL prečnici kružnica k_1 i k_2 (slika). Označimo sa A' i C' podnožja visina iz temena A i C redom. Kako je $\angle KBH = \angle HBL = 90°$ (periferijski uglovi nad prečnikom), tačke K, B, L leže na jednoj pravoj. Kako je

$$\angle BKH = \angle BAH \text{ i } \angle BLH = \angle BCH \tag{1}$$

(periferijski uglovi nad istim lukom) i $\angle BAH = 90° - \angle ABC = \angle BCH$ (iz pravouglih trouglova ABA' i CBC'), iz (1) sledi da je $\angle BKH = \angle BLH$. Dakle, trougao KLH je jednakokrak, odakle je $HK = HL$.

5. Kružnice k_1 i k_2 seku se u tačkama A i E. Kroz tačku A povučena je prava a koja seče kružnice k_1 i k_2 (po drugi put) u tačkama B i C redom. Tangente u tačkama B i C kružnica k_1 i k_2 redom, seku se u tački D. Dokaži da veličina ugla BDC ne zavisi od izbora prave a kroz tačku A.

Rešenje. Imamo da je (slika)

$$\angle DBC = \angle DBA = \angle BEA \tag{1}$$

i

$$\angle DCB = \angle DCA = \angle CEA. \tag{2}$$

S druge strane je $\angle BDC = 180° - (\angle DBC + \angle DCB)$, pa na osnovu (1) i (2),

$$\angle BDC = 180° - (\angle BEA + \angle CEA) = 180° - \angle BEC. \tag{3}$$

Iz trougla BCE imamo da je $\angle BEC = 180° - \angle ABE - \angle ACE$, pa je na osnovu (3),

$$\angle BDC = 180° - (180° - \angle ABE - \angle ACE) = \angle ABE + \angle ACE.$$

Za date kružnice k_1 i k_2, periferijski uglovi $\angle ABE$ i $\angle ACE$ nad zajedničkom tetivom AE ne zavise od položaja tačaka B i C na kružnicama k_1, odnosno k_2; prema tome ni njihov zbir, tj. ugao $\angle BDC$.

6. Neka je M tačka u unutrašnjosti četvorougla $ABCD$ takva da je četvorougao $ABMD$ paralelogram. Dokaži da ako je $\angle CBM = \angle CDM$, tada je i $\angle ACD = \angle BCM$.

Rešenje. Neka je N takva tačka da je $BN \parallel MC$ i $CN \parallel MB$ (slika). Tada su četvorouglovi $BMCN$ i $ADCN$ paralelogrami, pa je $\angle NAB = \angle CDM$ i $\angle NCB = \angle CBM$. Po uslovu zadatka je i $\angle CBM = \angle CDM$, pa sledi da je $\angle NAB = \angle NCB$. To znači da je $ABNC$ tetivni četvorougao, odakle sledi da je

$$\angle NBC = \angle NAC. \tag{1}$$

Kako su četvorougli $BNCM$ i $ANCD$ paralelogrami, to je

$$\angle NBC = \angle BCM \text{ i } \angle NAC = \angle ACD. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) sledi da je $\angle ACD = \angle BCM$.

7. U unutrašnjosti paralelograma $ABCD$ data je tačka Q takva da je $\angle ABQ = \angle QDA$. Dokaži da je $\angle BQA + \angle CQD = 180°$.

Rešenje. Neka je Q' tačka u spoljašnjosti paralelograma takva da su trouglovi $CQ'D$ i BQA podudarni (slika). Tada je $AQ = DQ'$, $AQ \parallel DQ'$, pa je $AQQ'D$ paralelogram. Kako je

$$\angle DQQ' = \angle ADQ = \angle ABQ = \angle DCQ,$$

četvorougao $QCQ'D$ je tetivni, odakle je

$$\angle BQA + \angle CQD = \angle DQ'C + \angle CQD = 180^\circ.$$

8. Prava kroz teme A jednakostraničnog trougla ABC seče upisanu kružnicu u tačkama Q i P tako da je tačka Q središte duži AP. Odredi veličinu ugla BPC.

Rešenje. Neka je O centar upisane kružnice i neka ona dodiruje stranice AB i AC redom u tačkama M i K (slika). Kako su M i Q središta duži AB i AP redom, to je MQ srednja linija trougla ABP, paralelna stranici BP. Slično, KQ je srednja linija trougla ACP, paralelna stranici CP. Sledi da je $\angle BPC = \angle MQK$ (uglovi sa paralelnim kracima). Kako je trougao ABC jednakostraničan, manji luk određen tačkama M i K kružnice čini trećinu te kružnice, odakle se lako zaključuje da je $\angle MQK = 120^\circ$.

9. Kroz centar kružnice k_1 prolazi kružnica k_2. Te dve kružnice se seku u tačkama A i B. Kroz tačku B konstruisana je tangenta t kružnice k_2 koja kružnicu k_1 preseca u tački C. Dokaži da je $AB = BC$.

Rešenje. Neka su O_1 i O_2 centri kružnica k_1 i k_2 redom i neka je $\angle O_1BC = \alpha$ (slika). Tada je periferijski ugao nad tetivom O_1B kružnice k_2 jednak α, a centralni $\angle BO_2O_1 = 2\alpha$. Tada je $\angle AO_2B = 2 \cdot 2\alpha = 4\alpha$, pa je periferijski ugao nad tetivom AB kružnice k_2 jednak 2α. Ugao između tetive i tangente je tada $\angle ABC = 2\alpha$. Tada je $\angle ABO_1 = \angle ABC - \angle O_1BC = 2\alpha - \alpha = \alpha$. Iz podudarnosti jednakokrakih trouglova AO_1B i CO_1B sada sledi $AB = BC$.

10. Dat je nejednakokraki trougao ABC. Neka je tačka H ortocentar, a O centar kružnice opisane oko trougla ABC i neka prave CH i CO seku opisanu kružnicu redom u tačkama M i N. Dokaži da su tačke A, B, M, N temena jednakokrakog trapeza.

Rešenje. Četvorougao $ABNM$ je trapez, jer je $CM \perp AB$ (visina iz temena C normalna je na stranicu AB) i $CM \perp MN$ ($\angle CMN = 90^\circ$, kao ugao nad prečnikom). Da je $AM = BN$, sledi iz jednakosti periferijskih uglova ABM i BMN (BM je transverzala paralelnih pravih AB i MN).

11. Bilijar ima oblik konveksnog četvorougla $ABCD$. Iz tačke K stranice AB puštena je bilijarska loptica, koja se odbila od stranica BC, CD i DA u tačkama L, M, N redom, vratila se u tačku K i nastavila kretanje po trajektoriji $KLMN$. Dokaži da je $ABCD$ tetivni četvorougao.

Rešenje. Koristiti teoremu o zbiru uglova u trouglu i zakon "ugao pada jednak je uglu odbijanja".

12. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao takav da je teme D u unutrašnjosti kružnice opisane oko trougla ABC. Dokaži da je $\angle BAD + \angle BCD < 180^\circ$.

Rešenje. Produžimo stranicu CD do preseka E sa opisanom kružnicom. Četvorougao $ABCE$ je tetivni, pa je $\angle BAE + \angle BCE = \angle BAE + \angle BCD = 180^\circ$. Kako je $\angle BAD < \angle BAE$ i $\angle BCD = \angle BCE$, sledi tvrđenje.

13. Dijagonale tetivnog četvorougla $ABCD$ seku se u tački O. Kružnice opisane oko trouglova AOB i COD seku se u tački M na stranici AD. Dokaži da je tačka O centar kružnice upisane u trougao BMC.

Rešenje. Iz jednakosti periferijskih uglova sledi da je $\angle OBC = \angle DBC = \angle DAC = \angle MAO = \angle MBO$ (slika), odakle sledi da je BO simetrala ugla MBC. Analogno dokazujemo da je CO simetrala ugla BCM, što znači da je O centar upisane kružnice trougla BMC.

14. U tetivnom četvorouglu $ABCD$ tačka M leži na stranici AD i pri tome je $BM \parallel CD$ i $CM \parallel BA$. Ako je $AM = a$ i $DM = b$, dokaži da je $BC = \sqrt{ab}$.

Rešenje. Produžimo prave BM i CM i označimo sa E i F redom njihove druge preseke sa opisanom kružnicom četvorougla (slika). Dobijamo dva tetivna trapeza: $ABCF$ i $BCDE$. Kako su trapezi upisani u kružnicu, oni su jednakokraki, odakle je $BC = AF = DE$. Koristeći jednakost periferijskih uglova nad jednakim lukovima i paralelnost pravih BM i CD, imamo da je:

$$\angle DAF = \angle FCD = \angle ABE = \angle ADE$$

i

$$\angle AFC = \angle ADC = \angle AMB = \angle DME.$$

Tada su trouglovi AFM i DME slični (dva ugla), odakle je $AM : DE = AF : DM$. Uzimajući u obzir da je $BC = AF = DE$, dobijamo da je $BC^2 = AM \cdot DM$, tj. $BC = \sqrt{ab}$.

15. U kružnici sa centrom O je AB prečnik, a CD tetiva normalna na taj prečnik. Tačka M je središte poluprečnika OC, a E tačka kružnice takva da tetiva AE sadrži tačku M. Tetive DE i BC seku se u tački P. Dokaži da tačka P polovi tetivu BC.

Rešenje. Neka je tačka Q središte tetive BC. Kako je $\angle AOM$ centralni ugao nad lukom AC, a $\angle DBQ$ periferijski ugao nad duplo većim lukom CAD, to je $\angle AOM = \angle DBQ$. Pored toga u trouglu BQD je $BD = 2 \cdot BQ$, a u trouglu OMA je $OA = 2 \cdot OM$, pa su ti trouglovi slični, odakle je $\angle OAM = \angle BDQ$. Kako su to jednaki periferijski uglovi nad lukom čija je jedna krajnja tačka B, sledi da i krak DQ seče kružnicu u tački E. Kako prava DE sadrži tačku P, sledi da se tačka Q poklapa sa tačkom P.