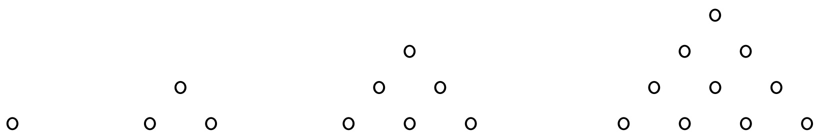
TROUGAONI BROJEVI

Broj kružića raspoređenih u obliku trougla na slici 1, određuje niz trougaonih brojeva.



Vidimo da je broj kružića u jednom trouglu jednak zbiru prvih nekoliko prirodnih brojeva, jer se svaki trougao sastoji od nekoliko slojeva koji sadrže redom jedan, dva, tri, četiri... kružića.

Početni članovi niza trougaonih brojeva su:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, \ldots$$

Ako sa t_n označimo n–ti član niza, vidimo da je

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Poznata je legenda o tome kako je Gaus kao osnovac izračunao zbir brojeva od 1 do 100. Njegov postupak primenićemo za izračunavanje zbira prvih n prirodnih brojeva, za proizvoljan prirodan broj n. Označimo taj zbir sa S_n. Zapisaćemo tu činjenicu na dva načina, koji se razlikuju samo po redosledu kojim su ispisani sabirci. U prvom slučaju su ti sabirci napisani u rastućem, a u drugom u opadajućem poretku.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n \tag{1}$$

$$S_n = n + (n-1) + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1. \tag{2}$$

Sabiranjem jednakosti (1) i (2) dobijamo da je

$$S_n = (1+n) + (2 + (n-1)) + (3 + (n-2)) + \ldots + ((n-1)_2) + (n_1),$$

tj.

$$2S_n = (1+n) + (1+n) + \ldots + (n+1) + (n+1). \tag{3}$$

Pri sabiranju, sabirke smo grupisali redom – prve sabirke iz obe jednakost u prvu zagradu, druge u drugu itd. Na taj način smo dobili n sabiraka, pri čemu je svaki jednak $n+1$. Sledi da je $2S_n = n(n+1)$, odakle je

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

ZADACI

1. U ravni je dato n tačaka među kojima ne postoje tri kolinearne (koje pripadaju istoj pravoj). Koliko je različitih pravih određeno tim tačkama?
2. U ravni je dato n različitih tačaka Koliko je različitih duži određeno tim tačkama?
3. Na koliko načina između n osoba možemo izabrati dvočlanu delegaciju?
4. Na šahovskom turniru učestvuje n šahista. Svaki je sa svakim odigrao po jednu partiju. Koliko je ukupno partija odigrano na turniru?
5. Koliko dijagonala ima n-ugao?
6. Za svaki neparan broj $n > 1$, broj $\frac{1}{8}(n^2 - 1)$ je trougaoni broj.
7. Dokaži da je za svaki prirodan broj n
$$\frac{1}{8}(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n)$$
trougaoni broj.
8. Dokaži da je za svaki prirodan broj n
$$\frac{1}{8}(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n)$$
trougaoni broj.
9. Dokaži da za svaki prirodan broj n,
$$9^n + 9^{n-1} + \cdots + 9 + 1$$
trougaoni broj.
10. Naći sve prirodne brojeve n za koje je $\frac{n^2+2n+12}{2}$ trougaoni broj.
11. Dokaži da je $\frac{9n+2}{2}$ trougaoni broj ako i samo ako je $\frac{n}{2}$ trougaoni broj.
12. Dokaži da je broj $8999\ldots91000\ldots02$, gde je broj devetki jednak broju nula, proizvod dva uzastopna prirodna broja.

13. Broj 5 može se na 6 načina predstaviti u obliku zbira tri prirodna broja: $3+1+1=5$, $2+2+1=5$, $1+3+1=5$, $1+2+2=5$, $2+1+2=5$, $1+1+3=5$.

    Na koliko načina se prirodan broj $n \geq 3$ može predstaviti kao zbir tri prirodna broja? Ne pravimo razliku između dva predstavljanja koja se razlikuju samo redosledom sabiraka.

14. Zbir prvih n prirodnih brojeva je za 100 manji od zbira sledećih n prirodnih brojeva. Nađi n.

15. Koliko najviše stranica može imati konveksan mnogougao čiji su svi uglovi različite veličine a veličina svakog ugla izražava se celim brojem stepeni?

16. Dokaži da je $\underbrace{55\ldots5}_{n-1}6\underbrace{11\ldots11}_{n-1}$ trougaoni broj.