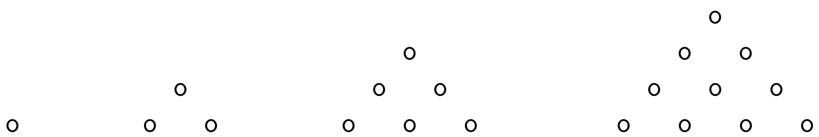
TROUGAONI BROJEVI

Broj kružića raspoređenih u obliku trougla na slici 1, određuje niz trougaonih brojeva.



Vidimo da je broj kružića u jednom trouglu jednak zbiru prvih nekoliko prirodnih brojeva, jer se svaki trougao sastoji od nekoliko slojeva koji sadrže redom jedan, dva, tri, četiri... kružića.

Početni članovi niza trougaonih brojeva su:

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, \ldots$$

Ako sa t_n označimo n–ti član niza, vidimo da je

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Poznata je legenda o tome kako je Gaus kao osnovac izračunao zbir brojeva od 1 do 100. Njegov postupak primenićemo za izračunavanje zbira prvih n prirodnih brojeva, za proizvoljan prirodan broj n. Označimo taj zbir sa S_n. Zapisaćemo tu činjenicu na dva načina, koji se razlikuju samo po redosledu kojim su ispisani sabirci. U prvom slučaju su ti sabirci napisani u rastućem, a u drugom u opadajućem poretku.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n \tag{1}$$

$$S_n = n + (n-1) + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1. \tag{2}$$

Sabiranjem jednakosti (1) i (2) dobijamo da je

$$S_n = (1+n) + (2 + (n-1)) + (3 + (n-2)) + \ldots + ((n-1)_2) + (n_1),$$

tj.

$$2S_n = (1+n) + (1+n) + \ldots + (n+1) + (n+1). \tag{3}$$

Pri sabiranju, sabirke smo grupisali redom – prve sabirke iz obe jednakost u prvu zagradu, druge u drugu itd. Na taj način smo dobili n sabiraka, pri čemu je svaki jednak $n+1$. Sledi da je $2S_n = n(n+1)$, odakle je

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

ZADACI

1. U ravni je dato n tačaka među kojima ne postoje tri kolinearne (koje pripadaju istoj pravoj). Koliko je različitih pravih određeno tim tačkama?

   Rešenje. Označimo date tačke sa $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$. Posmatrajmo prvo prave koje sadrže tačku A_n. Broj takvih pravih je $n-1$, jer tačka A_{n-1} sa svakom od preostalih $n-1$ tačaka određuje jednu pravu. To su sve različite prave, jer ne postoje tri kolinearne tačke. Posmatrajmo sad prave koje sadrže tačku A_{n-1}. Jedna od njih je već među onih $n-1$ pravih koje sadrže tačku A_n. Pored nje postoji još $n-2$ pravih koje pored tačke A_{n-1} sadrže redom tačke $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$. Broj pravih koje sadrže tačku A_{n-2} i neku od tačaka različitih od A_{n-1} i A_n jednak je $n-3$ itd. Zaključujemo da je traženi broj pravih jednak

   $$1 + 2 + 3 + \ldots + 9n - 2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. U ravni je dato n različitih tačaka Koliko je različitih duži određeno tim tačkama?

   Rešenje. Kao u prethodnom zadatku zaključujemo da je traženi broj duži jednak $\frac{n(n-1)}{2}$.

3. Na koliko načina između n osoba možemo izabrati dvočlanu delegaciju?

   Rešenje. Označimo osobe sa $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Pitanje je na koliko načina možemo izabrati jedan par osoba. Broj parova koje sadrže osobu A_n jednak je $n-1$, jer sa njom u paru može biti bilo koja od preostalih $n-1$ osoba. Dalje posmatramo koliko ima parova koji sadrže osobu A_{n-1}, a koji nisu među ranije već izabranim parovima. Jasno je da je broj takvih parova jednak $n-2$. Nastavljajući tako zaključujemo da je traČeni broj jednak

   $$1 + 2 + 3 + \ldots + 9n - 2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

4. Na šahovskom turniru učestvuje n šahista. Svaki je sa svakim odigrao po jednu partiju. Koliko je ukupno partija odigrano na turniru?

   Rešenje. Kako je svaki učesnik odigrao sa svakim po jednu partiju, broj odigranih partija jednak je broj načina da se izabere par učesnika, tj. $\frac{n(n-1)}{2}$.

5. Koliko dijagonala ima n-ugao?

Rešenje. Svaka dva temena n–ugla određuju jednu duž, a ta duž je ili stranica ili dijagonala n–ugla. Ukupan broj duži je $\frac{n(n-1)}{2}$, od kojih su n duži stranice n–ugla. Broj dijagonala je onda jednak

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

6. Za svaki neparan broj $n > 1$, broj $\frac{1}{8}(n^2 - 1)$ je trougaoni broj.

   Rešenje. Ako je $n = 2k + 1$, onda je

$$n^2 - 1 = (n-1)(n+1) = 2k(2k+2) = 4k(k+1),$$

   odakle je

$$\frac{1}{8}(n^2 - 1) = \frac{k(k+1)}{2}.$$

7. Dokaži da je za svaki prirodan broj n

$$\frac{1}{8}(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n)$$

   trougaoni broj.

   Rešenje. $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n = (n^2 + n + 1)^2 - 1$, pa je dati broj oblika $\frac{1}{8}(m^2 - 1)$, gde je m neparan broj. Sad tvrđenje sledi na osnovu prethodnog zadatka.

8. Dokaži da je za svaki prirodan broj n

$$\frac{1}{8}(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n)$$

   trougaoni broj.

   Rešenje. $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n = (n^2 + n + 1)^2 - 1$, pa je dati broj oblika $\frac{1}{8}(m^2 - 1)$, gde je m neparan broj.

9. Dokaži da za svaki prirodan broj n,

$$9^n + 9^{n-1} + \cdots + 9 + 1$$

   trougaoni broj.

   Rešenje. Dati broj se može napisati u obliku

$$\frac{9^{n+1} - 1}{8} = \frac{1}{8}((3^{n+1})^2 - 1).$$

10. Naći sve prirodne brojeve n za koje je $\frac{n^2+2n+12}{2}$ trougaoni broj.

Rešenje. Tražićemo sve prirodne brojeve n za koje je $n^2+2n+12$ proizvod dva uzastopna prirodna broja.

Broj n mora biti paran, jer je u protivnom $n^2+2n+12$ neparan, pa ne može biti proizvod dva uzastopna prirodna broja. Važi:

$$n(n+1) = n^2+n < n^2+2n+12.$$

S druge strane, za parne brojeve veće od 10 je $12 < n+2$, tj.

$$n^2+2n+12 < n^2+3n+2 = (n+1)(n+2).$$

Dakle, za paran broj $n > 10$ je

$$n(n+1) < n^2+2n+12 < (n+1)(n+2),$$

pa dati broj ne može biti proizvod dva uzastopna prirodna broja. Za parne brojeve manje od 12, proverva se da je samo za $n = 2$ i $n = 10$, $n^2+2n+12$ proizvod dva uzastopna prirodna broja.

11. Dokaži da je $\frac{9n+2}{2}$ trougaoni broj ako i samo ako je $\frac{n}{2}$ trougaoni broj.

Rešenje. Dokazaćemo ekvivalentno tvrđenje: Broj $9n+2$ je proizvod dva uzastopna prirodna broja ako i samo ako je n proizvod dva uzastopna prirodna broja.

Ako je $n = k(k+1)$, za neki prirodni broj k, onda je

$$9n+2 = 9k(k+1)+2 = 9k^2+9k+2 = (3k+1)(3k+2).$$

S druge strane, broj koji pri deljenju sa 9 daje ostatak 2 a proizvod je dva uzastopna prirodna broja, mora biti oblika $(3k+1)(3k+2)$ (u protivnom bi bio deljiv sa 9). Međutim, iz $9n+2 = (3k+1)(3k+2)$ sledi $9n+2 = 9k^2+9k+2 = 9k(k+1)+2$, tj. $n = k(k+1)$.

12. Dokaži da je broj $8999\ldots91000\ldots02$, gde je broj devetki jednak broju nula, proizvod dva uzastopna prirodna broja.

Rešenje. Kako je

$$8\underbrace{9\ldots9}_{k-1}1\underbrace{0\cdots00}_{k} = 8\underbrace{9\ldots9}_{k-1}1\cdot 10^k = 9\cdot\underbrace{9\cdots9}_{k}\cdot 10^k = 9\cdot(10^k-1)\cdot 10^k,$$

to je dati broj jednak $9\cdot(10^k-1)\cdot 10^k+2$, pa na osnovu prethodnog zadatka sledi da je on proizvod dva uzastopna prirodna broja.

13. Broj 5 može se na 6 načina predstaviti u obliku zbira tri prirodna broja: $3+1+1=5$, $2+2+1=5$, $1+3+1=5$, $1+2+2=5$, $2+1+2=5$, $1+1+3=5$.

Na koliko načina se prirodan broj $n \geq 3$ može predstaviti kao zbir tri prirodna broja? Ne pravimo razliku između dva predstavljanja koja se razlikuju samo redosledom sabiraka.

Rešenje. Utvrdićemo na koliko načina se mogu izabrati prirodni brojevi a, b, c tako da važi

$$a+b+c=n,$$

za dati broj n. Jasno je da sabirak c može uzimati vrednosti od 1 do $n-2$. U svakom od tih slučajeva je $a+b=n-c$. Koristićemo činjenicu da se prirodan broj $m \geq 2$ može na $m-1$ načina predstaviti u obliku zbira dva prirodna broja.

Za $c=1$ je $a+b=n-1$, a broj $n-1$ se na $n-2$ načina predstaviti kao zbir dva prirodna broja, što znači da se n može na $n-1$ načina predstaviti kao proizvod tri prirodna broja, ako je treći sabirak 1.

Za $c=2$ je $a+b=n-2$, a broj $n-2$ se na $n-3$ načina predstaviti kao zbir dva prirodna broja.

Vidimo da se povećanjem sabirka c za 1, broj predstavljanja smanjuje za 1. Na kraju, za maksimalnu moguću vrednost trećeg sabirka $c=n-2$, broj predstavljanja je 1.

Sada saberimo brojeve načina predstavljanja za sve moguće vrednosti trećeg sabirka. Dobijamo da je traženi broj

$$1+2+3+\ldots+(n-2)=t_{n-2}=\frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

14. Zbir prvih n prirodnih brojeva je za 100 manji od zbira sledećih n prirodnih brojeva. Nađi n.

Rešenje. Zbir prvih n prirodnih brojeva jednak je $\frac{n(n+1)}{2}$, a zbir sledećih n brojeva je

$$(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+n)=n\cdot n+(1+2+\ldots+n)=n^2+\frac{n(n+1)}{2}.$$

Po uslovu zadatka je

$$\frac{n(n+1)}{2}+100=n^2+\frac{n(n+1)}{2},$$

tj. $n^2=100$, odakle nalazimo da je $n=10$.

15. Koliko najviše stranica može imati konveksan mnogougao čiji su svi uglovi različite veličine a veličina svakog ugla izražava se celim brojem stepeni?

Rešenje. Ako se veličine unutrašnjih uglova izražavaju celim brojem stepeni, to važi i za spoljašnje uglove. Kako je zbir spoljašnjih uglova jednak 360° i

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 26 = 351 < 360 < 378 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 26 + 27,$$

sledi da je maksimalan broj stranica mnogougla jednak 26.

16. Dokaži da je $\underbrace{55\ldots5}_{n-1}6\underbrace{11\ldots11}_{n-1}$ trougaoni broj.

Rešenje. Dokazaćemo prvo da je broj $\underbrace{111\ldots11}_{n}\underbrace{222\ldots22}_{n}$ je proizvod dva uzastopna prirodna broja.

Zaista,

$$\begin{aligned}\underbrace{111\ldots11}_{n}\underbrace{222\ldots22}_{n} &= \underbrace{111\ldots11}_{n}\cdot 10^n + 2\cdot\underbrace{111\ldots11}_{n} = \underbrace{111\ldots11}_{n}\cdot 1\underbrace{00\ldots00}_{n-1}2\\ &= \underbrace{111\ldots11}_{n}\cdot 3\cdot\underbrace{33\ldots33}_{n-1}4 = \underbrace{333\ldots33}_{n}\cdot\underbrace{33\ldots33}_{n-1}4.\end{aligned}$$

Sledi tvrđenje našeg zadatka sledi na osnovu toga što je
$2\cdot\underbrace{55\ldots5}_{n-1}6\underbrace{11\ldots11}_{n-1} = \underbrace{111\ldots11}_{n}\underbrace{222\ldots22}_{n}$.