REŠENJA ZADATAKA NA TEMU "AG NEJEDNAKOST I PRIMENE" KOJI NISU REŠENI NA ČASU

1. Dokaži da za realan broj $b \geq -1,\ b \neq 0$ važi nejednakost
$$\frac{4b^2 + b + 1}{4|b|} \geq \sqrt{b+1}.$$

Rešenje. Napišimo nejednakost u obliku
$$\frac{|2b|^2 + (b+1)}{2} \geq \sqrt{|2b|^2 \cdot (b+1)}.$$
Sad se ona svodi na AG–nejednakost za nenegativne brojeve $4b^2$ i $b+1$.

2. Dokaži da za nenegativne brojeve a i b važi nejednakost
$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}.$$

Rešenje. Oslobađajući se zagrade na levoj strani i deljenjem sa 2, dobijamo ekvivalentnu nejednakost
$$\frac{(a+b) + 2\sqrt{ab}}{2} \geq \sqrt{(a+b) \cdot 2\sqrt{ab}},$$
što je AG–nejednakost za brojeve $a+b$ i $2\sqrt{ab}$.

3. Da li postoje racionalni brojevi x, y, u, v koji zadovoljavaju jednačinu
$$(x + y\sqrt{2})^2 + (u + v\sqrt{2})^2 = 7 + 5\sqrt{2}\ ? \qquad (1)$$

Rešenje. Pretpostavimo da jednačina (1) ima rešenje, gde su x, y, u, v racionalni brojevi. Oslobađajući se zagrada na levoj strani, jednačina (1) može se napisati u obliku
$$x^2 + 2xy\sqrt{2} + 2y^2 + u^2 + 2uv\sqrt{2} + 2v^2 = 7 + 5\sqrt{2}. \qquad (2)$$
Iz iracionalnosti broja $\sqrt{2}$ sledi da je jednakost $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, gde su a, b, c i d racionalni brojevi, ekvivalentna sa jednakostima $a = c$, $b = d$. U našem zadatku to znači da je jednačina (2) ekvivalentna sistemu jednačina
$$x^2 + 2y^2 + u^2 + 2v^2 = 7,\ \ 2xy + 2uv = 5. \qquad (3)$$
Koristeći AG–nejednakost za nenegativne brojeve x^2 i $2y^2$, kao i za nenegativne brojeve u^2 i $2v^2$, procenićemo izraz na levoj strani prve jednačine sistema (3):
$$(x^2 + 2y^2) + (u^2 + 2v^2) \geq 2\sqrt{x^2 \cdot 2y^2} + 2\sqrt{u^2 \cdot 2v^2} =$$
$$\sqrt{2}(|2xy| + |2uv|) \geq \sqrt{2}(2xy + 2uv).$$
Na osnovu (3), prvi broj u ovom nizu nejednakosti jednak je 7, a poslednji $5\sqrt{2}$. Dakle, ako jednačina (1) ima rešenje u skupu racionalnih brojeva, onda je $7 \geq 5\sqrt{2}$. Međutim, ta nejednakost ne važi, jer je ekvivalentna sa $49 \geq 50$. Dakle, sistem (3) je protivurečan, pa njemu ekvivalentna jednačina nema rešenje u skupu racionalnih brojeva.

4. Vuk je pojeo na prazan želudac 3 praseta i 7 jarića i još uvek je bio gladan. Drugi put je pojeo na prazan želudac 7 prasića i jedno jare i prejeo se. Da li će se vuk zasititi ako pojede na prazan želudac 11 jarića?

   Rešenje. Označimo sa p i j redom hranljivu vrednost praseta i jareta redom. Po uslovu zadatka je

$$3p + 7j < 7p + j,$$

   odakle je $6j < 4p$, tj. $j < \frac{2}{3}p$, i dalje $4j < \frac{8}{3}p < 3p$. Sledi da je $11j = 4j + 7j < 3p + 7j$, što znači da će vuk posle konzumiranja 11 jarića i dalje ostati gladan.

5. Marko kaže da su dve lubenice teže od tri dinje, a Ilija kaže da su tri lubenice teže od četiri dinje. Poznato je da jedan od njih dvojice uvek laže, a drugi uvek govori istinu. Da li je 12 lubenica teže od 18 dinja? (Pretpostavlja se da su sve lubenice iste težine i sve dinje iste težine.)

   Rešenje. Neka su l i d redom masa lubenice i masa dinje. Markov iskaz ekvivalentan je sa $6l > 9d$, a Ilijin da je $6l > 8d$. Zato, ako je u pravu Marko, onda je u pravu i Ilija. Kako je nemoguće da su oba u pravu, to je tačan Ilijin iskaz, a Markov nije. Dakle, tačno je da je $6l > 8d$, tj. $12l > 16d$, a nije $6l > 9d$, tj. nije $12l > 18d$.