

1. ZADACI 1–5

1. U zapisu

$$A + BC + D = AB + CD$$

zameni slova ciframa (ista slova jednakim, a različita različitim) tako da dobiješ tačnu jednakost.

Rešenje. Lako se vidi da su sve cifre A , B i C različite od 0. Kako je $10B + A + C + D = 10A + 10C + B + D$, sledi da je $9B = 9(A + C)$, tj. $B = A + C$. Sad se lako vidi da B ne može biti 1 ili 2. Analizirajući redom moguće vrednosti za B , nalazimo sva rešenja.

Na primer, jedno rešenje je: $3 + 85 + 4 = 38 + 54$.

Dodatno pitanje: Koliko ima rešenja?

Odgovor: 224. Rešenja su sve četvorke (A, B, C, D) koje zadovoljavaju uslove: $B = A + C$, gde su A, B, C cifre različite od 0 i D cifra različita od A, B i C . Na taj način za svaku trojku cifara (A, B, C) , koje zadovoljavaju uslov $B = A + C$, cifra D može uzimati 7 vrednosti, Kako se trojka (A, B, C) može izabrati na $2 \cdot 16 = 32$ načina, ukupan broj rešenja je $7 \cdot 32 = 224$.

2. Na nekim karticama je napisan broj 6, a na drugima znak +. Pera i Joca imaju na raspolaganju po 10 takvih kartica, od kojih bar po pet sa ciframa i bar po jednu sa znakom +. Svaki od njih je sastavio po jedan izraz pomoću tih kartica. Da li je moguće da se njihovi izrazi razlikuju za

(a) 3000;

(b) 3003?

Rešenje. (a) Da. Na primer, $9699 + 6$ i $6696 + 9$.

(b) Da. Na primer, $9666 + 9$ i $6666 + 6$.

3. Prava p leži u ravni paralelograma $ABCD$ i nema s njim zajedničkih tačaka. Ako su rastojanja temena A , B i C od prave p jednaka redom 5, 2, 4, odredi rastojanje d temena D od prave p .

Rešenje. Neka je O tačka preseka dijagonala paralelograma $ABCD$ i A', B', C', D', O' redom podnožja normala tačaka A, B, C, D, O na pravu p , pri čemu je $AA' = 5$, $BB' = 2$, $CC' = 4$. Duž OO' je srednja linija i trapeza $AA'C'C$ i trapeza $BB'D'D$. Zato je

$$\frac{b + d}{2} = OO' = \frac{a + c}{2},$$

odakle je $b + d = a + c$, tj. $d = a + c - b$. U našem slučaju je $d = 5 + 4 - 2 = 7$.

4. Ski žičara ima 99 kabina. Ako sedneš u kabinu 42 u podnožju žičare, koliko ćeš kabina sresti do vrha?

Rešenje. Sve ostale. Prvo kabinu 41, a poslednju 43. Ovde nije važno u koju si kabinu seo.

5. Velika sveća izgori za 1 sat i cena joj je 60 dinara. Mala sveća izgori za 11 minuta i cena joj je 11 dinara. Da li je moguće odmeriti vreme od 1 minute po ceni od 150 dinara?

Rešenje. Istovremeno zapalimo jednu veliku i jednu malu sveću. U trenutku kad mala sveća dogori, zapalimo sledeću malu sveću itd. U trenutku kad dogori peta mala sveća, upalimo istovremene dve male sveće (šestu i sedmu) i ugasimo jednu od njih (šestu) u trenutku kad dogori velika sveća. Na taj način dobijamo jedan ugarak (ostatak šeste sveće) koji može da gori 6 minuta. Sada upalimo novu malu sveću (osmu) i u trenutku kad dogori sedma mala sveća, upalimo ostatak šeste sveće. Vreme od trenutka kad dogori osma mala sveća i trenutka kad dogori ostatak šeste sveće iznosi 1 minut.

Dakle, potrošili smo ukupno jednu veliku sveću (60 dinara) i osam malih ($8 \cdot 11 = 88$ dinara), što nas je ukupno koštalo 148 dinara.