4. ZADACI 16–20

16. Dokaži da je
$$\frac{1+3+5+\ldots+99}{101+103+\ldots+199}=\frac{1}{3}.$$

Rešenje 1. Dokazujemo opštije tvrđenje
$$\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\ldots+(4n-1)}=\frac{1}{3}. \tag{1}$$

Polazimo od toga da je $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$. Tada se leva strane jednakosti (1) može napisati u obliku
$$\frac{n^2}{(2n)^2-n^2},$$
što je dalje jednako
$$\frac{n^2}{4n^2-n^2}=\frac{n^2}{3n^2}=\frac{1}{3}.$$

Rešenje 2. Tvrđenje sledi na osnovu toga što je
$$101+103+\ldots 199=50\cdot 100+1+3+\ldots 99$$
i
$$50\cdot 100=2\cdot 50\cdot 50=2\cdot(1+3+5+\ldots+99).$$

Ovde smo ustvari koristili Gausov postupak pri sabiranju prvih nekoliko neparnih brojeva.

17. Dokaži da je moguće svaki trougao razrezati na tri dela tako da se svaki deo može ceo pokriti sa druga dva.

Rešenje. Treba razrezati po dužima koje spajaju centar upisane kružnice sa temenima.

18. U šestouglu $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ postoji tačka O, iz koje se sve stranice šestougla vide pod uglom od 60°. Dokaži da ako je $OA_1>OA_3>OA_5$ i $OA_2>OA_4>OA_6$, onda je i
$$A_1A_2+A_3A_4+A_5A_6<A_2A_3+A_4A_5+A_6A_1.$$

Rešenje. Na kracima ugla od 60° označimo tačke B_i na rastojanju $|OA_i|$ od temena O, pri čemu su tačke sa parnim indeksima na jednom, a tačke sa neparnim indeksima na drugom kraku (slika ...). Sada treba dokazati da je
$$B_1B_2+B_3B_4+B_5B_6<B_2B_3+B_4B_5+B_6B_1,$$
a ova nejednakost dobija se sabiranjem tri očigledne nejednakosti:
$$B_1B_2<B_1X+XB_2;\ \ B_3B_4<B_3X+XY+YB_4;\ \ B_5B_6<B_5Y+YB_6.$$

19. Prirodan broj m dobijen je permutovanjem cifara broja n. Dokaži da je zbir cifara broja $5m$ jednak zbiru cifara broja $5n$.

Rešenje. Neka je $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ dekadni zapis broja m. Ako je s_k zbir cifara broja $5a_k$ (koji ima najviše dve cifre), onda je dovoljno dokazati da je zbir cifara broja $5m$ jednak $s_1 + s_2 + \cdots + s_n$. Proveriti da pri množenju 5 sa m, na uobičajeni način, nema prenosa pri sabiranju parcijalnih proizvoda $5a_k$.

20. U svaki od tri kvadrata 3×3 upisani su brojevi od 1 do 9, u svako polje po jedan. Dokaži da u skupu $A = \{1, 2, \ldots, 9\}$ postoje dva broja koja ni u jednom od ta tri kvadrata nisu susedni, tj. ne nalaze se u susednim poljima. Dva polja su susedna ako imaju zajedničku ivicu.

Rešenje. Obojimo svaki kvadrat na šahovski način, tako da se dobiju 4 bela i 5 crnih polja. Susedna polja su različito obojena. Podelimo brojeve skupa A u 8 grupa:

$$CCC, CCB, CBC, CBB, BCC, BCB, BBC, BBB.$$

(CBC znači da je broj iz te grupe u prvom kvadratu na crnom polju, u drugom na belom, u trećem na crnom.) Kako ima više brojeva nego grupa, neka grupa sadrži bar dva broja. Brojevi iz iste grupe nisu susedi ni u jednom kvadratu, jer su u svakom kvadratu na poljima iste boje.